INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN VASLUI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 19.02.2017
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compozitie

$$x * y = 2(x-1)(y-1)+1\,,(\forall)\ x,y \in \mathbb{R}.$$

a. Calculati $2 * 3'$,unde $3'$ este simetricul elementului 3.
b. Aflați $m \in \mathbb{R}$ dacă $x * x * x = 2^{m}(x-1)^3+1, (\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
c. Pe tablă sunt scrise numerele de la $\{0,1,2,3,\ldots,25\}$. În clasă sunt 25 de elevi. Fiecare copil vine la tablă alege la întâmplare 2 numere, le șterge și pune în loc rezultatul compunerii lor după legea dată. Ce număr va scrie ultimul copil pe tablă?

Soluție:

a) elementul neutru este e = $\frac{3}{2}$..1p

Simetricul lui 3 este $3' = \frac{9}{8}$.. 1p

$2 * 3' = \frac{5}{4}$.. 1p

b) $x * x = 2(x-1)^2 + 1$ 1p

$x * x * x = 2^2(x-1)^3 + 1$ 1p

$2^2(x-1)^3 + 1 = 2^m(x-1)^3 + 1 \Rightarrow m=2$

c) 1 elementul absorbant... 1p

$1 * x = 1$ și de aici rezultă că ultimul numar scris va fi 1 .... 1p

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ f(x) = \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

a) Aflați a, b daca $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, F(x) = a \cdot arctgx + b \cdot arctg\frac{x}{2}$ este o primitivă a lui f.
b) Calculați $\int_0^1 (x^4-1) \cdot f(x)dx$.
c) Calculați $\int_0^1 x \cdot f(x)dx$.

Soluție:

a) $F'(x) = f(x)$ F derivabila 1p

$\frac{a}{1+x^2} + \frac{2b}{4+x^2} = \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}$ 1p

a=1, b= - $\frac{1}{2}$

b) $\int_0^1 \frac{3(x^2-1)}{x^2+4} = 3\int_0^1 1 - \frac{5}{x^2+4} = 3(x - arctg\frac{x}{2})\Big|_0^1 = 3(1 - \frac{5}{2}arctg\frac{1}{2})$ 2p

c) $\int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{3}{(t+1)(t+4)}dt = \frac{1}{2}$ (ln $\frac{8}{5}$) 2p

3. Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.
Arătați că $\int_0^2 f(x)\,dx > \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx$.

Soluție:

Calculează $\int_0^2 f(x)\,dx = \ln 5$ 2p

$\int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx = \int_2^4 f(x)\,dx$ 1p

Calculeaza 2p

Finalizare 2p

4.

a. Determinați soluțiile ecuației $x^2=\hat{2}$+x, în inelul (Z_6, +, ·).
b. Numim „ideală" perechea de tipul ($\hat{a}, \hat{b}$) cu $\hat{a}, \hat{b}$ ϵ Z_4 și a+b = $\hat{0}$. Determinați perechile ideale de tipul ($\hat{a}, \hat{b}$).
c. Calculați produsul elementelor inversabile din Z_6.

Soluție:

a) x = $\hat{2}$.. 3p

x = $\hat{5}$

b)($\hat{0}, \hat{0}$), ($\hat{1}, \hat{5}$), ($\hat{2}, \hat{4}$), ($\hat{3}, \hat{3}$), ($\hat{4}, \hat{2}$), ($\hat{5}, \hat{1}$)... 2p

c) U(Z_6) = $\{\hat{1}, \hat{5}\}$ 1p

$\hat{1} \cdot \hat{5} = \hat{5}$ 1p